1 Travail d'une force

1. Introduction

● On sait qu'une force appliquée à un système (S) est capable de modifier son mouvement (direction, sens et/ou valeur de la vitesse). Une force est donc capable d'augmenter ou de diminuer l'énergie cinétique de (S) dont l'expression est : $E_c = \frac{1}{2} m v_G^2$ pour un solide en translation de centre de gravité G.

● On peut donc considérer qu'une force est un convertisseur d'énergie. Elle permet de convertir une forme d'énergie en une autre, l'une des deux étant sous forme d'énergie cinétique et l'autre dépendant de la nature de la force.

● La quantité d'énergie que la force convertit en énergie cinétique est appelée travail de la force, noté $W(\vec{F})$ et s'exprimant en joule (J). C'est une grandeur algébrique, son signe indique le sens du transfert de l'énergie :
– si $W(\vec{F}) > 0$, l'énergie cinétique du système augmente : on dit que la force est motrice ;
– si $W(\vec{F}) < 0$, son énergie cinétique diminue, la force est résistante.

2. Travail élémentaire

● En classe de première, pour une force constante en direction, sens et valeur sur un déplacement rectiligne AB, on définit le travail de cette force par la relation : $W_{A \to B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

● Si le déplacement n'est pas rectiligne et si la force n'est pas constante, on décompose le trajet du point d'application en sections infiniment petites sur lesquelles on peut considérer la force $\vec{F}$ constante et le vecteur déplacement $\mathrm{d}\vec{\ell}$ rectiligne.

● Lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell}$ du point d'application d'une force $\vec{F}$, le travail élémentaire dW vaut : $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = F.\mathrm{d}\ell.\cos\alpha$.

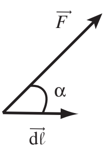


Fig. 12-1

3. Travail total

● Pour trouver le travail total de A à B, on fait la somme de tous les travaux élémentaires. Comme il y a une infinité de déplacements élémentaires pour aller de A à B, la somme de ces travaux n'est pas une somme discrète ($\sum \mathrm{d}W$) mais une somme continue : il s'agit d'une somme au sens intégrale ($\int \mathrm{d}W$).

- $W_{A \to B}(\vec{F}) = \mathrm{d}W_1 + \mathrm{d}W_2 + \ldots + \mathrm{d}W_n$
  $= \vec{F}.\mathrm{d}\vec{\ell_1} + \vec{F}.\mathrm{d}\vec{\ell_2} + \ldots \vec{F}.\mathrm{d}\vec{\ell_n}$.

$$\boxed{W_{A \to B}(\vec{F}) = \int_A^B \mathrm{d}W = \int_A^B \vec{F}.\mathrm{d}\vec{\ell}}$$

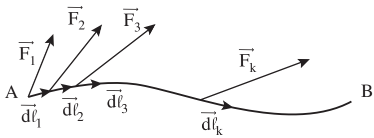


Fig. 12-2

4. Travail d'une action sur un ressort

- Calculons le travail de la tension $\vec{T}$ exercée par un opérateur sur un ressort horizontal lors d'un déplacement de A à B du point d'application de $\vec{T}$.

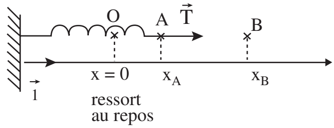


Fig. 12-3

On a : $\vec{T} = + k.x.\vec{i}$ et $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x.\vec{i}$.

$$W_{A \to B}(\vec{T}) = \int_A^B \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_A^B (k.x.\vec{i}).(dx.\vec{i}) \,,$$

soit : $W_{A \to B}(\vec{T}) = \int_A^B (k.x.\mathrm{d}x).(\vec{i}.\vec{i}) = \int_A^B (k.x.\mathrm{d}x) = \left[\frac{1}{2}.k x^2\right]_A^B$.

- On obtient : $W_{A \to B}(\vec{T}) = \frac{1}{2}.k.(x_B^2 - x_A^2)$. Cette expression est valable pour A et B du même côté de O.

- C'est aussi, par définition de l'intégrale, l'aire sous la courbe $T = \mathrm{f}(x)$ de x_A à x_B :
$W_{A \to B}(\vec{T})$ = aire (grand triangle) – aire (petit triangle)
$= 1/2\ k.x_B^2 - 1/2\ k.x_A^2$.
On retrouve bien la même expression.

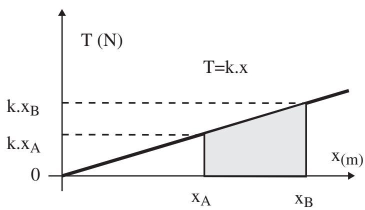


Fig. 12-4

Exemple d'application

Calculer l'énergie qu'il faut fournir à un ressort pour le comprimer de 10 cm à partir de sa position au repos. On donne sa constante de raideur $k = 1\,000$ N.m^{-1}.

Corrigé commenté

***Indication** : Faîtes un calcul d'intégrale.*

On reprend la figure 12-3 avec ici $x_A = 0$ et $x_B = -0{,}1$ m. Le travail à fournir est égal au travail de la force à exercer pour le comprimer.

$$W_{A \to B}(\vec{T}) = \int_B^A k.x.\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.k.(x_B^2 - x_A^2) \text{, soit : } W_{A \to B}(\vec{T}) = \frac{1}{2}.1\,000.(-0{,}1)^2 = 5 \text{ J.}$$

2 Énergie mécanique d'un système « solide-ressort » horizontal

1. Énergie potentielle élastique d'un ressort seul

● La tension $\vec{T}$ exercée par un opérateur qui comprime ou qui étire un ressort à partir de sa position de repos est une force qui convertit l'énergie cinétique fournie par l'opérateur en énergie potentielle élastique (pour le ressort).

● Bien que l'énergie cinétique diminue, le travail de $\vec{T}$ est positif ; il s'agit en effet de l'énergie cinétique possédée par l'opérateur et non celle du système constitué par le ressort.
On a : $\Delta E_{P\,A \to B} = W_{A \to B}(\vec{T})$, soit : $E_{PB} - E_{PA}$: $\frac{1}{2}.k.(x_B{}^2 - x_A{}^2) = \frac{1}{2}.k.x_B{}^2 - \frac{1}{2}.k.x_A{}^2$.

L'énergie potentielle élastique d'un ressort est donc : $\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}.k.x^2}$.

2. Étude énergétique du système « solide-ressort »

● On étudie le système « solide-ressort » horizontal en négligeant les frottements, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On écarte G de sa position à l'équilibre jusqu'au point G_m tel que $x = x_m > 0$ puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

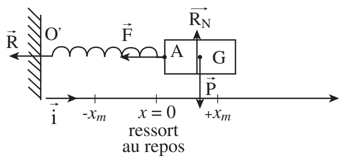


Fig. 12-5

● Les forces appliquées au système sont : le poids du système : $(\vec{P})$, la réaction normale du support : $(\overrightarrow{R_N})$, la force de réaction exercée par le mur en O' sur le système : $(\vec{R})$ et la force exercée par le ressort sur la masse en A : $(\vec{F} = -k.x.\vec{i})$.
Le poids et la réaction normale du rapport ne travaillent pas puisque ces forces sont orthogonales au déplacement ; $\vec{R}$ ne travaille pas puisque son point d'application est fixe.

Remarque : *$\vec{F}$ est une force intérieure au système. D'habitude, le bilan des forces ne fait intervenir que des forces exercées par le milieu extérieur car les systèmes étant en général indéformables, les forces intérieures ne travaillent pas. Ici, le système étant déformable, cette force travaille. Elle convertit de l'énergie cinétique possédée par la masse en énergie potentielle élastique communiquée au ressort).*

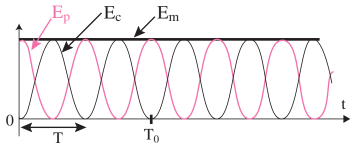
● On applique le théorème de l'énergie cinétique sur le premier quart de période du mouvement (G passe de G_m à O). Seule, $\vec{F}$ travaille sur une distance valant G_mO.

$$\Delta E_{c\ G_m \to O} = W_{G_m \to O}(\vec{F}) = \int_{G_m}^{O} \vec{F}\,.\,d\vec{\ell} = \int_{G_m}^{O} (-\,k.x).dx = -\,\frac{1}{2}\,.k.(x_O{}^2 - x_{G_m}{}^2)$$

On obtient $\Delta E_{c\ G_m \to O} = \Delta E_{P\ G_m \to O}$, soit : $\Delta E_{c\ G_m \to O} = \Delta E_{P\ G_m \to O} = 0$.

● En introduisant l'expression de l'énergie mécanique $E_m = E_P + E_c$, on peut écrire $\Delta E_m = 0$. **L'énergie mécanique du système se conserve : le système est dit conservatif.**

● Sur ce premier quart de période, toute l'énergie potentielle initiale du ressort est convertie en énergie cinétique pour la masse par la force $\vec{F}$.
La masse atteint sa vitesse maximale en O, mais le ressort ne possède plus d'énergie potentielle.



Les transferts d'énergie entre les formes cinétique et potentielle sont périodiques de période $T = T_0/2$, où T_0 est la période propre des oscillations.

Fig. 12-6

Puis G passe de O à G_m' tel que $x = -x_m$ (deuxième quart de période), $\vec{F}$ change alors de sens et convertit alors l'énergie cinétique en énergie potentielle... Il y a transfert mutuel d'énergie cinétique en énergie potentielle élastique au cours de ce mouvement périodique.

Exemple d'application

On écarte de l'équilibre un pendule élastique de masse m et de constante de raideur k d'une amplitude $x_m > 0$ avant de le lâcher sans vitesse. Les frottements sont négligés. D'après le chapitre précédent, son équation horaire est de la forme : $x(t) = X_m.\cos\left(\frac{2\,\pi}{T_0}.t + \phi_0\right)$.
Déterminer l'expression de $E_c(t)$ possédée par le pendule à un instant t.

Corrigé commenté

***Indication** : dérivez x(t) pour trouver v(t), puis remplacez l'expression de v(t) dans la formule de l'énergie cinétique.*

La dérivée de $x(t)$ par rapport au temps est : $\dot{x}(t) = -X_m\,\frac{2\,\pi}{T_0}\,.\sin\left(\frac{2\,\pi}{T_0}\,t + \phi_0\right)$.

Comme $E_c(t) = \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^2$, on a $E_c(t) = \frac{1}{2}\,m\left[-X_m\,\frac{2\,\pi}{T_0}\,.\sin\left(\frac{2\,\pi}{T_0}\,t + \phi_0\right)\right]^2$.

Avec $T_0 = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ et $\sin^2(a) = (1 - 2.\cos(2.a))/2$, on calcule :

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\,kX_m{}^2[\sin(\frac{2\,\pi}{T_0}\,t + \phi_0)]^2 = \frac{1}{4}\,.k.X_m{}^2\left[1 - \cos\left(\frac{2\,\pi}{\frac{T_0}{2}}\,t + 2\phi_0\right)\right].$$

3 Énergie d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme

1. Travail du poids

● La force gravitationnelle exercée par la terre sur un objet de son voisinage est appelée le « poids de l'objet » : $\vec{P} = m.\vec{g}$, où $\vec{g}$ est le vecteur champ de pesanteur. Si les distances parcourues à la surface de la Terre ne dépassent pas quelques kilomètres, $\vec{g}$ peut être considéré comme constant : on dit que **le champ de pesanteur est uniforme**.

● Lorsque l'objet change d'altitude, son poids travaille. Il convertit alors de l'énergie cinétique en énergie potentielle de pesanteur ou inversement selon qu'il gagne ou perd de l'altitude :
– si l'objet perd de l'altitude, $W(\vec{P}) > 0$: on dit que $\vec{P}$ est moteur,
– si l'objet monte, $W(\vec{P}) < 0$: on dit que $\vec{P}$ est résistant.

● Lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell}$, le travail élémentaire du poids est :
$\mathrm{dW}(\vec{P}) = \vec{P}.\mathrm{d}\vec{\ell} = m.g.(\vec{k}.\mathrm{d}\vec{\ell}) = m.g.\mathrm{dz}$.
De A à B, si $\vec{g}$ est constant, on a :

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B \mathrm{d}W = \int_A^B (-m.g.\mathrm{dz}) = [-m.g.z]_{z_A}^{z_B},$$

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{P}) = mg.(z_A - z_B)}$$

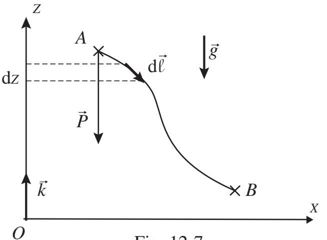


Fig. 12-7

Dans l'exemple de la figure 12-7, on a : $z_B < z_A$, donc $W_{A\to B}(\vec{P}) > 0$.

● Ce travail est indépendant du chemin suivi entre A et B, il ne dépend que des altitudes de départ et d'arrivée.

2. Énergie potentielle de pesanteur

● $W_{A\to B}(\vec{P}) = -\,mg.(z_B - z_A) = -\,(mgz_B - mgz_A) = -\,(E_{PB} - E_{PA}) = -\,\Delta E_{P\,A\to B}$.

● L'énergie potentielle de pesanteur est donc : $\boxed{E_p(z) = m.g.z}$, si on la considère comme étant nulle à l'altitude $z = 0$.

3. Énergie mécanique

● On communique à un petit projectile de masse m, une vitesse $\vec{v}_0$ (voir figure 12-8).

● On étudie le système (masse m dans le champ de pesanteur) dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Ce système n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$. Tous les frottements sont négligés.

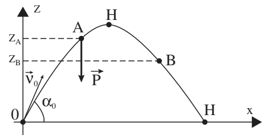


Fig. 12-8

● On applique le théorème de l'énergie cinétique au projectile lors de son mouvement entre A et B :
$\Delta E_{c\ A \to B} = W_{A \to B}(\vec{P})$, soit : $\Delta E_{c\ A \to B} = -\ mg.(z_B - z_A) = -\ (mgz_B - mgz_A)$.
On obtient : $\Delta E_{c\ A \to B} = -\ \Delta E_{P\ A \to B}$ et donc : $\Delta E_{c\ A \to B} + \Delta E_{P\ A \to B} = 0$ (2).

● En introduisant l'expression de l'énergie mécanique $E_m = E_P + E_c$, on peut écrire : $\Delta E_m = 0$. L'énergie mécanique du système se conserve : **on dit que le système est conservatif**.

● De O jusqu'au sommet de la trajectoire, le poids effectue un travail négatif où l'énergie cinétique est convertie en énergie potentielle de pesanteur. Du sommet de la trajectoire jusqu'à H, le poids effectue un travail positif : c'est l'énergie potentielle de pesanteur qui est convertie en énergie cinétique.

Exemple d'application

On considère le projectile de la figure 12-8.

1. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer z_F.

2. Faire de même en appliquant cette fois le théorème de l'énergie mécanique.

Données : $v_0 = 14$ m.s^{-1} ; $\alpha_0 = 90°$; $g = 9{,}81$ N.kg^{-1}.

Corrigé commenté

1. *Indication* *: appliquez le théorème de l'énergie cinétique entre O et F.*
Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le théorème de l'énergie cinétique entre O et F au projectile soumis à son seul poids $\vec{P}$.
$\Delta E_{c\ O \to F} = W_{O \to F}(\vec{P})$, soit : $\frac{1}{2}.m.v_F^2 - \frac{1}{2}.m.v_O^2 = m.g.(z_F - z_O)$. En F, la vitesse du projectile est nulle. On a donc : $0 - \frac{1}{2}.v_O^2 = -\ g.(z_F - 0)$, soit : $z_F = \frac{v_O^2}{2.g} = 10$ m.

2. *Indication* *: appliquez le théorème de l'énergie mécanique entre O et F.*
On applique au même système étudié dans le même référentiel le théorème de l'énergie mécanique entre O et F. La seule force qui travaille est le poids ; or elle convertit ici de l'énergie cinétique (mécanique) en énergie potentielle de pesanteur (mécanique aussi !).
On a donc :
$\Delta E_{m\ O \to F} = \Delta E_{P\ O \to F} + \Delta E_{c\ O \to F} = 0$, soit : $(m.g.z_F - m.g.z_O) + (\frac{1}{2}.m.v_F^2 - \frac{1}{2}.m.v_O^2) = 0$.
Tous calculs faits, on trouve : $z_F = \frac{v_O^2}{2.g}$, soit : $z_F = \frac{14^2}{2 \times 9{,}81} \approx 10$ m.